Universidad de Buenos Aires
FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS

SEMINARIO DE DOCTORADO

Filosofía de la geometría: debates actuales

Docente a cargo: Dr. Eduardo N. Giovannini
Carga horaria: 32 HS. (Semi-intensivo)
Primer cuatrimestre 2023

Fundamentación

Las investigaciones modernas sobre los fundamentos de la geometría han tenido un impacto notable en el desarrollo de la filosofía contemporánea de la matemática. Los trabajos seminales en torno a la axiomatización y formalización de teorías geométricas, en la primera mitad del siglo XX, desempeñaron un papel central en el surgimiento de la concepción estructuralista de la matemática, en las discusiones sobre la semántica de los lenguajes matemáticos y en los debates sobre el realismo y anti-realismo matemático, por mencionar sólo algunos ejemplos. La filosofía de la geometría constituye así una sub-disciplina medular en la filosofía contemporánea de la matemática. El objetivo del seminario es ofrecer panorama sinóptico de una serie de debates actuales en el ámbito de la filosofía de la geometría. El curso comenzará con una presentación de carácter introductorio de los trabajos de Hilbert (1899) y Tarski (1956) sobre los fundamentos axiomáticos de la geometría. Dicha presentación tendrá por objetivo familiarizar a las/los doctorandas/os (evitando en la medida de lo posible tecnicismos innecesarios) con los sistemas geométricos que servirán de referencia en los debates filosóficos que serán abordados en el seminario.

Sobre la base de esta presentación introductoria, el curso se centrará en cuatro tópicos recientes en el ámbito de la filosofía de la geometría y de la filosofía formal de la ciencia.

El primero de estos debates trata de la significación de la geometría axiomática formal para el desarrollo de la perspectiva "modelo-teórica" en la lógica y matemática moderna. En particular, se analizarán una serie de estudios recientes sobre las pruebas de consistencia e independencia de axiomas geométricos, y cómo estos resultados metateóricos impactaron en el surgimiento de concepción "modelo-teórica" de los lenguajes matemáticos (cf. Eder & Schiemer 2018; Dean 2020). En segundo lugar, se estudiarán nuevas propuestas de *criterios formales de equivalencia teórica*, en gran medida motivadas por la consideración de importantes resultados metateóricos sobre la formalización de teorías geométricas. La determinación de criterios formales de equivalencia teórica ha sido un tema muy discutido en la filosofía de la ciencia en la década de 1970 (véase, por ejemplo, Glymour 1977 y Quine 1975), y ha recibido recientemente un renovado interés a partir de los trabajos de van Fraassen (2014), Coffey (2014) y, especialmente, Barrett & Halvorson (2016a,2016b, 2017). En esta parte del curso, nos ocuparemos de analizar diversas nociones formales de equivalencia teórica y sus implicancias para los debates sobre el relativismo conceptual y el realismo metafísico en filosofía de la matemática.

En un tercer momento, se realizará una reconsideración del llamado nominalismo geométrico, en particular representado en la propuesta de Field (2016). El objetivo de esta parte del curso es aprovechar los conocimientos adquiridos sobre la axiomatización de la geometría para analizar críticamente los argumentos presentados por Field en favor de una posición nominalista en filosofía de la geometría. En cuarto lugar, incorporando la perspectiva de la filosofía de la práctica matemática, se discutirán una serie de trabajos recientes sobre el problema de la "pureza de los métodos de prueba" en geometría (Arana & Mancosu 2012; Baldwin 2018). Esquemáticamente, una demostración 'pura' tiene lugar cuando los recursos o métodos empleados en ella son intrínsecos o inherentes al teorema demostrado o al problema resuelto, i.e., cuando los métodos son sugeridos por el "contenido" de la proposición en cuestión. Esta parte final del curso tendrá así por objetivo conectar las discusiones previas sobre la semántica de los lenguajes matemáticos con reflexiones filosóficas recientes sobre los métodos de demostración en matemática.

Desde una perspectiva metodológica que combinará consideraciones tanto sistemáticas como históricas, el seminario se propone familiarizar a las/os doctorandas/os con estas recientes líneas de investigación en filosofía de la geometría, explorando además sus vinculaciones conceptuales. La propuesta resulta de interés para las/os doctorandas/os trabajando específicamente en las áreas de filosofía de la matemática, lógica y filosofía e historia de la ciencia. Sin embargo, el contenido técnico del curso será presentado de manera introductoria y accesible, de modo que también resultará apropiado para doctorandas/os trabajando en otras áreas de la filosofía teórica contemporánea, tales como filosofía del lenguaje y metafísica.

Objetivos

1. Adquirir un panorama sinóptico sobre algunos desarrollos teóricos recientes en el ámbito de la filosofía de la matemática, en particular de la geometría.
2. Identificar las principales posiciones en los debates sobre los antecedentes de la concepción "modelo-teórica" de las teorías matemáticas en la moderna geometría axiomática.
3. Analizar diversos criterios formales de equivalencia teórica propuestos recientemente y evaluar sus implicancias para los debates sobre la relatividad conceptual.
4. Reconocer los conceptos técnicos fundamentales del nominalismo geométrico de Field y confrontar esta posición con resultados recientes sobre la moderna geometría sintética.
5. Identificar y evaluar distintas nociones de contenido formal de un enunciado matemático y explorar sus implicancias para los debates sobre la pureza de los métodos de prueba.
6. Desarrollar y entrenar competencias básicas relacionadas con el trabajo de investigación en filosofía, en particular la elaboración de artículos.

<u>Semana 1: Consideraciones preliminares sobre la geometría axiomática moderna</u>

Contenidos:

El surgimiento de la geometría axiomática formal. Los *Fundamentos de la geometría* de Hilbert (1899). Elementos del sistema axiomático de Hilbert para la geometría euclídea. Los objetivos de la axiomatización. Geometría y álgebra: métodos sintéticos vs métodos analíticos. La axiomatización de primer orden de la geometría elemental de Tarski (1959).

Bibliografía obligatoria:

- Baldwin, J. T. (2018). *Model Theory and the Philosophy of Mathematical Practice. Formalism without formalization*. Cambridge: Cambridge University Press (Capítulos 9 y 10)
- Hilbert, D. (1971). *Foundations of Geometry*. La Salle: Open Court. Translated by L. Unger from the 10th German Edition (Selección de pasajes)
- Tarski, A. (1959). What is elementary geometry? *In The axiomatic method with special reference to geometry and physics.* North-Holland.

Bibliografía complementaria:.

- Hartshorne, R. (2000). *Geometry: Euclid and Beyond*. New York: Springer. (Capítulo 2)
- Giovannini, E. N. (2016). Bridging the gap between analytic and synthetic geometry: Hilbert's axiomatic approach. *Synthese*, 193 (1), 31–70.
- Tarski, A., Givant, S.: Tarski's system of geometry. *Bulletin of Symbolic Logic* **5**(2), 175–214 (1999)

<u>Semana 2:</u> **Raíces geométricas de la teoría de modelos I: consistencia, independencia y definiciones estructurales**

Contenidos:

Las pruebas de consistencia e independencia en *Fundamentos* de Hilbert. Traducción y construcción de "modelos analíticos". Consistencia relativa e interpertabilidad sintáctica. Consistencia relativa e interpretabilidad semántica. La concepción modelo-teórica de las teorías matemáticas. Definiciones estructurales y teoría de modelos. Consistencia y existencia matemática. La controversia Frege/Hilbert revisada.

Bibliografía obligatoria:

- Dean, W. (2020). On Consistency and Existence in Mathematics. *Proceedings of the Aristotelian Society* 120 (3), 349-393.
- Eder, G. & Schiemer, G. (2018). Hilbert, duality, and the geometrical roots of model theory. *Review of Symbolic Logic*, 11(1), 48–86.
- Hallett, M. (2012). More on Hilbert and Frege. (In M. Frappier, D. Brown and R. DiSalle (Eds.), *Analysis and Interpretation in the Exact Sciences. Essays in Honour of William Demopoulos* (pp. 135-162) Dordrecht: Springer.
- Giovannini, E. & Schiemer, G. (2021). What are implicit definitions?, *Erkenntnis*, 86: 1661–1691.

Bibliografía complementaria:

- Hintikka, J. (1988). On the development of the model-theoretic viewpoint in logical theory. *Synthese* 77(1), 1–36.
- Sieg, W. (2021). The Ways of Hilbert's Axiomatics: Structural and Formal, en Reck, E & Schiemer, G., *The Prehistory of Mathematical Structuralism*, Oxford: OUP, pp. 142-165.
- Demopoulos, W. (1994). Frege, Hilbert, and the Conceptual Structure of Model Theory. *History and Philosophy of Logic* 15, 211-225.

- Blanchette, P. (2017). Models in geometry and logic: 1870–1920. En N. S. Sober (Ed.), *Logic, methodology and philosophy of science—Proceedings of the 15th international congres*s (pp. 41–61). London: College Publications.

Semana 3: Geometría, lógica y criterios formales de equivalencia teórica

Contenido:

Criterios formales de equivalencia de teorías: equivalencia definicional, equivalencia Morita y bi-interpretabilidad. Ejemplos de teorías geométricas equivalentes. Implicancias filosóficas: el "argumento de la geometría" revisado. Relatividad conceptual y realismo metafísico.

Bibliografía obligatoria:

- Button, T. & Walsh, S. (2018). *Philosophy and Model Theory*. Oxford: Oxford University Press. (Capítulo 5)
- Barrett, T. W., & Halvorson, H. (2017). From Geometry to Conceptual Relativity. *Erkenntnis*, 82, 1043-1063

Bibliografía complementaria:

- Barrett, T. W., & Halvorson, H. (2016a). Glymour and Quine on theoretical equivalence. *Journal of Philosophical Logic*, 45(5), 467-483.
- Barrett, T. W., & Halvorson, H. (2016b). Morita equivalence. *The Review of Symbolic Logic* 9(3), 556-582.
- Glymour, C. (1977). The epistemology of geometry. *Nous*, 11, 227-251.
- Putnam, H. (1977). 'Realism and reason'. Proceedings and Addresses of the American Philosophical Association 50.6, pp.483–98.

Semana 4: ¿Qué es el nominalismo geométrico?

Contenidos

El programa de Field en *Science without Numbers* y el nominalismo geométrico. Conservatividad y teoremas de representación. ¿Qué es la geometría sintética (moderna)? La aritmetización interna de la geometría. La geometría (axiomática) sin números: abstracción y pureza.

Bibliografía obligatoria

- Field, H. (2016). *Science without numbers: A Defense of Nominalism*. Oxford: Oxford University Press (Prefacio y capítulos 1-3)

Bibliografía complementaria:

- Burgess, J. & Rosen, G. (1997). *A Science with no object*. *Strategies for Nominalist Interpretation of Mathematics* (Parte 2A)
- Panza, M. & Sereni, A. (2013). *Plato's Problem: An Introduction to Mathematical Platonism*. New York: Palgrave (Capítulo 4.1).

Semana 5): La perspectiva de la filosofía de la práctica matemática

Contenido:

El problema de la "pureza de los métodos de prueba". Casos de estudios en la geometría euclídea. La noción de 'contenido' de un enunciado matemático. Dos nociones de contenido formal de un enunciado matemático: la explicaciones sintácticas y semánticas. Significado y contenido formal en matemática.

Bibliografía obligatoria:

- Baldwin, J. T. (2018). *Model Theory and the Philosophy of Mathematical Practice*. Formalism without formalization. Cambridge: Cambridge University Press. Capítulo 12.
- Arana, A. & Mancosu, P. (2012). On the Relationship between Plane and Solid Geometry. *The Review of Symbolic Logic* 5(2), 294-353.

Bibliografía complementaria:

- Detlefsen, M. (2008). Purity as an Ideal of Proof. En P. Mancosu (Ed.), *The Philosophy of Mathematical Practice*, (pp. 179-197). New York: Oxford University Press.
- Arana, A. & Detlefsen, M. (2011). Purity of Methods. Philosophers' Imprint, 11(2), 1–20.

Modalidad docente

Actividades sincrónicas

Se realizarán dos reuniones semanales utilizando la plataforma Zoom tentativamente los días miércoles y viernes a las 17hs. Los encuentros tendrán por objeto la presentación introductoria de las nociones técnicas fundamentales en geometría (i.e., descripción y comparación de distintos sistemas axiomáticos para la geometría euclídea) y la discusión crítica de los textos filosóficos. Una parte de la última reunión estará reservada a la discusión grupal de los proyectos de monografía/artículo, requerida para la aprobación del curso.

Actividades asincrónicas

Foro de discusión: se habilitará un foro de discusión de modo semanal para que las/los participantes abordar preguntas y líneas de debate planteados en las actividades sincrónica. Este espacio también estará destinado a formular preguntas y responder inquietudes sobre los textos de carácter obligatorio u optativo. Se fomentará una participación activa en el tratamiento de los problemas, preguntas y líneas de investigación planteadas.

Actividades de resolución individual: cada semana se abrirán actividades individuales con preguntas para reflexionar a partir de los textos obligatorios, a fin de motivar la formulación de hipótesis para eventuales proyectos de trabajo final.

Proyecto de monografía/artículo final: elaboración y breve presentación de un proyecto de monografía/artículo final.

Actividades obligatorias

- Participación en al menos cinco de las ocho reuniones correspondientes a las semanas 1-5.
- Participación en al menos cuatro de los cinco foros correspondientes a las semanas 1-5.
- Participar activamente del foro correspondiente a la semana 5 en el que se discutirá acerca de la formulación de proyectos de monografía/artículo final.
- Se requiere la elaboración y breve presentación de un proyecto de monografía/artículo final.

Actividades optativas:

- Las actividades de resolución individual serán optativas. Sin embargo, se recomendará la resolución de aquellas que estén relacionadas con los temas correspondientes a un potencial proyecto de monografía/artículo final.

4. *Formas de evaluación*

El curso se aprueba con un trabajo monográfico de entre 6000 y 8000 palabras sobre algunos de los temas tratados en el programa. El trabajo monográfico deberá respetar la estructura de un artículo académico que satisfaga los estándares formales y de contenido de las publicaciones especializadas latinoamericanas. Asimismo, se priorizará el interés individual y la convergencia con líneas de trabajo e investigación previas.

5. *Requisitos para la aprobación del seminario*

Para mantener la regularidad del seminario, se debe cumplir con el 80% de las actividades obligatorias y participar de las instancias de intercambio. Para aprobar el seminario se debe elaborar un trabajo de las características definidas en "Formas de evaluación" en un lapso no mayor a seis meses.

Bibliografía general

Arana, A. & Mancosu, P. (2012). On the Relationship between Plane and Solid Geometry. *The Review of Symbolic Logic* 5(2), 294-353.

Arana, A. & Detlefsen, M. (2011). Purity of Methods. Philosophers' Imprint, 11(2), 1–20.

Baldwin, J. T. (2018). *Model Theory and the Philosophy of Mathematical Practice. Formalism without formalization*. Cambridge: Cambridge University Press.

Barrett, T. W., & Halvorson, H. (2016a). Morita equivalence. *The Review of Symbolic Logic* 9(3), 556-582.

Barrett, T. W., & Halvorson, H. (2016a). Glymour and Quine on theoretical equivalence. *Journal of Philosophical Logic*, 45(5), 467-483.

Barrett, T. W., & Halvorson, H. (2017). From Geometry to Conceptual Relativity. *Erkenntnis*, 82, 1043-1063.

Blanchette, P. (2017). Models in geometry and logic: 1870–1920. En N. S. Sober (Ed.), *Logic, methodology and philosophy of science—Proceedings of the 15th international congres*s (pp. 41–61). London: College Publications.

Burgess, J. & Rosen, G. (1997). *A Science with no object*. *Strategies for Nominalist Interpretation of Mathematics* (Parte 2A)

Button, T. y Walsh, S. (2018). *Philosophy and Model Theory*. Oxford: OUP.

Coffey, K. (2014). Theoretical equivalence as interpretative equivalence. *The British Journal for the Philosophy of Science*, 65(4), 821–844.

Dean, W. (2020). On Consistency and Existence in Mathematics. *Proceedings of the Aristotelian Society* 120 (3), 349-393.

Demopoulos, W. (1994). Frege, Hilbert, and the Conceptual Structure of Model Theory. *History and Philosophy of Logic* 15, 211-225.

Detlefsen, M. (2008). Purity as an Ideal of Proof. En P. Mancosu (Ed.), *The Philosophy of Mathematical Practice*, (pp. 179-197). New York: Oxford University Press.

Eder, G. & Schiemer, G. (2018). Hilbert, duality, and the geometrical roots of model theory. *Review of Symbolic Logic*, 11(1), 48–86.

Field, H. (2016). *Science without numbers: A Defense of Nominalism*. Oxford: Oxford University Press.

Giovannini, E. N. (2016). Bridging the gap between analytic and synthetic geometry: Hilbert's axiomatic approach. *Synthese*, 193 (1), 31–70.
Giovannini, E. & Schiemer, G. (2021). What are implicit definitions?, *Erkenntnis*, 86: 1661–1691.
Glymour, C. (1977). The epistemology of geometry. *Nous*, 11, 227-251.
Hallett, M. (2012). More on Hilbert and Frege. (In M. Frappier, D. Brown and R. DiSalle (Eds.), *Analysis and Interpretation in the Exact Sciences. Essays in Honour of William Demopoulos* (pp. 135-162) Dordrecht: Springer.
Hartshorne, R. (2000). *Geometry: Euclid and Beyond*. New York: Springer.
Hilbert, D. (1971). *Foundations of Geometry*. La Salle: Open Court. Translated by L. Unger from the 10th German Edition (Selección de pasajes)
Hintikka, J. (1988). On the development of the model-theoretic viewpoint in logical theory. *Synthese* 77(1), 1–36.
Hodges, W. (1997). *A Shorter Model Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.
Kirby, J. (2019). *An Invitation to Model Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.
Marker, D. (2002). *Model Theory: An Introduction.* New York: Springer.
Panza, M. & Sereni, A. (2013). *Plato's Problem: An Introduction to Mathematical Platonism*. New York: Palgrave (Capítulo 4.1).
Putnam, H. (1977). 'Realism and reason'. Proceedings and Addresses of the American Philosophical Association 50.6, pp. 483–98.
Quine, W.V. (1975). On empirically equivalent systems of the world. Erkenntnis 9, 313-328.
Sieg, W. (2021). The Ways of Hilbert's Axiomatics: Structural and Formal, en Reck, E & Schiemer, G., *The Prehistory of Mathematical Structuralism*, Oxford: OUP, pp. 142-165.
Tarski, A. (1959). What is elementary geometry? *In The axiomatic method with special reference to geometry and physics.* North-Holland.
Tarski, A., Givant, S.: Tarski's system of geometry. *Bulletin of Symbolic Logic* **5**(2), 175–214 (1999).
van Fraassen, B. C. (2014). One or two gentle remarks about Hans Halvorson's critique of the semantic view. *Philosophy of Science*, 81(2), 276–283.